

Многочлены с целыми коэффициентами

4 июля

1. Известно, что квадратные трехчлены $ax^2 + bx + c$ и $(c - b)x^2 + (c - a)x + (a + b)$ с целыми коэффициентами имеют общий корень. Докажите, что $a + b + 2c$ делится на 3.
2. Все коэффициенты некоторого непостоянного многочлена целые и по модулю не превосходят 2025. Докажите, что любой положительный корень этого многочлена больше чем $1/2026$.

Теорема Безу.

1. Для любого многочлена $P(x)$ многочлен $P(x) - P(a)$ делится на $x - a$.
2. Пусть $Q(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Тогда для любых целых a и b разность $Q(a) - Q(b)$ делится на $a - b$.
3. В частности, $Q(a + b) - Q(b)$ делится на a .
Если $a \equiv b \pmod{n}$, то $Q(a) \equiv Q(b) \pmod{n}$.

3. Найдите свободный член многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, если известно, что он по модулю меньше тысячи, и $P(19) = P(94) = 1994$.
4. Дан многочлен с целыми коэффициентами, принимающий значение 7 в четырёх различных целых точках. Докажите, что он не может принимать значение 14 ни в какой целой точке.
5. Найдите все многочлены $f(x)$ с целыми коэффициентами, удовлетворяющие следующему условию: для любого простого p найдутся натуральные m и n , такие что $f(p^n) = p^m$.
6. Найдите все возможные значения n , при которых существуют многочлен степени n с целыми коэффициентами, который принимает значение n в n различных целых точках и равен 0 в нуле.
7. Найдите все непостоянные многочлены $P(x)$ с целыми коэффициентами такие, что $P(P(x) + x)$ является простым числом при бесконечном количестве целых x .
8. Даны натуральные числа a и b такие, что $a \geq 2b$. Существует ли многочлен $P(x)$ степени больше 0 с коэффициентами из множества $\{0, 1, 2, \dots, b - 1\}$ такой, что $P(a)$ делится на $P(b)$?
9. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Обозначим через $n(P)$ количество решений уравнения $P(x)^2 = 1$ в целых числах. Докажите, что $n(P) \leq \deg(P) + 2$.